II. DERECEDEN DENKLEMLER:

a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ şeklindeki ifadelere **ikinci dereceden denklem** adını veriyoruz.

1) $\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a}+4=0$ olduğuna göre a nedir?

$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a}+\frac{4}{1}=0$
(a) (a^2)

$4a^2+4a+1=0 \Rightarrow (2a+1)^2=0$
$a=-\frac{1}{2}$

2) a pozitif bir gerçel sayı ve

$a^4-2a^2=8$ olduğuna göre a kaçtır?

$a^4-2a^2-8=0$
$a^2 \quad -4$
$a^2 \quad +2$
$\Rightarrow a^2=4$ ya da $a^2 \neq -2$

$\boxed{a=2}$

3) $(m-2)x^3+(m-1)x^2-x-m-10=0$ denklemi ikinci dereceden bir denklem olduğuna göre bu denklemin köklerini bulunuz?

$(m-2)x^3+(m-1)x^2-x-m-10=0$
$(m-2) = 0$

$m-2=0 \Rightarrow m=2$

$x^2-x-12=0$

$(x-4).(x+3)=0 \Rightarrow x=4$ ya da $x=-3$

4) $x^2+(m+1)x+m-5=0$ denkleminin bir kökü -2 olduğuna göre diğer kökü nedir?

$x=-2$ için $4+(m+1).(-2)+m-5=0$
$4-2m-2+m-5=0$
$-3-m=0 \Rightarrow m=-3$

$m=-3$ için $x^2-2x-8=0$
$x \quad +2$
$x \quad -4$

$\Rightarrow x=-2$ ya da $\boxed{x=4}$

• **$ax^2+bx+c=0$ denkleminin çözümü:**

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde köklerin varlığı deltaya (Δ = diskriminant) bağlıdır.
$\Delta=b^2-4ac$

• $\Delta>0$ ise denklemin iki farklı reel kökü vardır.

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

• $\Delta=0$ ise denklemin birbirine eşit iki reel kökü (çakışık - çift kat - tam kare) vardır.

$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

• $\Delta<0$ ise denklemin reel kökü yoktur. Kökler sanaldır.

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

5) $x^2-2x-1=0$ denkleminin köklerini bulunuz?

$\Delta=b^2-4ac=4-4.1.-1=8$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

$\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$

6) $x^2-6x+7=0$ denkleminin köklerini bulunuz?

$\Delta=36-28=8$

$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{2}}{2}=3\pm\sqrt{2}$

$\{3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}\}$

7) $x^2-2x+2=0$ denkleminin reel köklerini bulunuz?

$\Delta=4-8=-4<0$ olduğundan denklemin reel kökü yoktur.

Ç.K: $\emptyset$

8) $x^2-2x+2=0$ denkleminin köklerini bulunuz?

$\Delta = 4-8 = -4$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

$\{1+i, 1-i\}$

9) $x^2-2mx+m+2=0$ ifadesinin tam kare olması için m hangi değerleri alır?

$\Delta = 0$

$(-2m)^2 - 4.1.(m+2) = 0$

$4m^2-4m-8=0$

$m^2-m-2=0$

$(m-2).(m+1)=0 \Rightarrow m=2$ ya da $m=-1$

10) $m^2x^2-(2m+1)x+1=0$ denkleminde köklerin eşit olması için m kaç olmalıdır?

$\Delta = 0$

$(-(2m+1))^2 - 4.m^2.1 = 0$

$\cancel{4m^2}+4m+1-\cancel{4m^2}=0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$

11) $x^2-6x+m-1=0$ denkleminin farklı iki reel kökünün olması için m nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

$\Delta > 0$

$(-6)^2-4.1.(m-1) > 0$

$36-4m+4 > 0$

$40 > 4m$

$10 > m$

↓

9 olmalıdır.

12) $x^2-2mx+16=0$ denkleminin reel kökü olmadığına göre m nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

$\Delta < 0$

$(-2m)^2-4.1.16 < 0$

$4m^2 < 64$

$m^2 < 16 \Rightarrow -4 < m < 4$

↓

$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

7 tanedir.

• İkinci dereceden denkleme dönüştürülebilen denklemler:

– Değişken değiştirme yöntemi:

13) $x^4+5x^2-36=0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$x^2=m$ olsun

$m^2+5m-36=0$

$(m+9).(m-4)=0 \Rightarrow m=-9$ ya da $m=4$

$x^2 \neq -9$ $\quad$ $x^2=4$

$\Rightarrow x=\pm 2$

$\{2,-2\}$

14) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x}{x-1} - 3 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz?

$\frac{x}{x-1} = m$ olsun

$m^2-2m-3=0$

m $\quad$ -3

m $\quad$ +1 $\Rightarrow m=3$ ya da $m=-1$

$\frac{x}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x-3=x \Rightarrow 2x=3$

$x=3/2$

$\frac{x}{x-1} = -1 \Rightarrow -x+1=x \Rightarrow 2x=1$

$x=1/2$

$\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

15) $\left(\frac{x+2}{x-3}\right) - 4\cdot\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = 3$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$\frac{x+2}{x-3} = m$ olsun

$m - \frac{4}{m} = 3 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$

$(m-4).(m+1) = 0$

$m = 4$ ya da $m = -1$

$\frac{x+2}{x-3} = 4 \Rightarrow 4x - 12 = x + 2$

$3x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{3}$

$\frac{x+2}{x-3} = -1 \Rightarrow x + 2 = -x + 3$

$2x = 1 \Rightarrow x = 1/2$

$\left\{\frac{14}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

16) $4^x - 12.2^x + 32 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz?

$2^x = m$ olsun.

$m^2 - 12m + 32 = 0$

$(m-8).(m-4) = 0 \Rightarrow m = 8$ ya da $m = 4$

$2^x = 8$ $\quad$ $2^x = 4$

$\Rightarrow x = 3$ $\quad$ $\Rightarrow x = 2$

$\{3, 2\}$

17) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 12$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$\sqrt[4]{x} = t$ olsun.

$t + t^2 = 12$

$t^2 + t - 12 = 0$

$(t+4).(t-3) = 0$

$\Rightarrow t \neq -4$ ya da $t = 3$

$\sqrt[4]{x} = 3 \Rightarrow x = 81$

$\{81\}$

18) $(x^2-x)^2 - 2.(x^2-x) - 24 = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$x^2 - x = m$ olsun.

$m^2 - 2m - 24 = 0$

$(m-6).(m+4) = 0$

$m = 6$ ya da $m = -4$

$x^2 - x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$(x-3).(x+2) = 0$

$x = 3$ veya $x = -2$

$x^2 - x = -4 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0$

$\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ olduğundan reel kök yoktur.

$\{3, -2\}$

- Köklü denklemler:

İçerisinde köklü ifade varsa önce köklü ifade yalnız bırakılır ve kökten kurtarmak için kuvveti alınarak kökler bulunur. Bulunan köklerin denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Sağlamayan kök alınmaz.

19) $x + \sqrt{x-1} = 7$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$\sqrt{x-1} = 7 - x$

$x - 1 = 49 - 14x + x^2$

$x^2 - 15x + 50 = 0$

$(x-10).(x-5) = 0 \Rightarrow x \neq 10$ ya da $\boxed{x = 5}$

20) $x + \sqrt{1-2x} = -1$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$\sqrt{1-2x} = -1 - x$

$1 - 2x = 1 + 2x + x^2$

$x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0 \Rightarrow x \neq 0$ ya da $\boxed{x = -4}$

• $ax^2+bx+c=0$ denkleminde köklerle katsayılar arasındaki ilişki:

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$ (kökler toplamı)

$$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$ (kökler çarpımı)

$$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

• Bunların dışında sorulanları bunlara benzeterek yapıyoruz.

• $\underset{(x_2)}{\frac{1}{x_1}}+\underset{(x_1)}{\frac{1}{x_2}}=\frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2}$

• $\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}=\frac{2x_1+2x_2}{x_1 \cdot x_2}=\frac{2(x_1+x_2)}{x_1 \cdot x_2}$

• $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2 \cdot x_1 \cdot x_2$

• $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1 \cdot x_2}$

• $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1+x_2)$

• $\underset{(1-x_2)}{\frac{1}{1-x_1}}+\underset{(1-x_1)}{\frac{1}{1-x_2}}=\frac{1-x_1+1-x_2}{(1-x_1) \cdot (1-x_2)}$

$$=\frac{2-x_1-x_2}{1-x_2-x_1+x_1 \cdot x_2}$$

$$=\frac{2-(x_1+x_2)}{1-(x_1+x_2)+x_1 \cdot x_2}$$

• $x_1^2 \cdot x_2+x_2^2 \cdot x_1=x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1+x_2)$

21) $\frac{x-1}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre x_1+x_2 toplamı nedir?

$$\underset{(x-5)}{\frac{x-1}{x-3}}+\underset{(x-3)}{\frac{x-1}{x-5}}=0$$

$$x^2-5x-x+5+x^2-3x-x+3=0$$

$$2x^2-10x+8=0$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=5$$

22) $x^2-2x+a=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre a nın hangi değeri için

$x_1+x_2+x_1 \cdot x_2=5$ olur?

$$\underbrace{x_1+x_2}_{2}+\underbrace{x_1 \cdot x_2}_{a}=5$$

$$2+a=5 \Rightarrow a=3$$

23) $x^2-2x+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ nin pozitif değeri nedir?

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=A$ (her iki tarafın karesi alınırsa)

$$\underbrace{x_1+x_2}_{2}+2\underbrace{\sqrt{x_1 \cdot x_2}}_{4}=A^2$$

$$2+4=A^2 \Rightarrow A=\sqrt{6}$$

24) $x^2-ax+16=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}=5$ olduğuna göre a nedir?

$$\frac{1+\sqrt{x_1 \cdot x_2}}{\sqrt{x_1}}=5 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x_1}}=5 \Rightarrow \sqrt{x_1}=1$$

$$x_1=1$$

$x_1=1$ denklemi sağlar.

$$1-a+16=0$$

$$\Rightarrow a=17$$

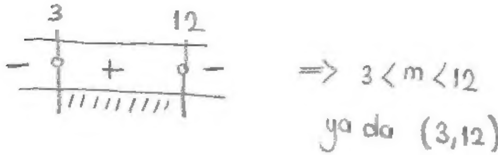
25) $x^2-3mx+m-3=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>4$ olduğuna göre m nin alacağı değerler kümesi nedir?

$\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}-4>0$

$\frac{3m}{m-3}-4>0 \Rightarrow \frac{3m-4m+12}{m-3}>0$

$\frac{12-m}{m-3}>0$



$\Rightarrow 3<m<12$ ya da $(3,12)$

26) $2x^2-4x+m-3=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1^2+x_2^2=4$ olması için m kaç olmalıdır?

$(x_1+x_2)^2-2.x_1.x_2=4$

$4-2.\left(\frac{m-3}{2}\right)=4 \Rightarrow 4-m+3=4 \Rightarrow m=3$

27) $x^2+(2m-1).x+m-3=0$ denkleminde m ne olmalıdırki x_1 ve x_2 kökleri için $x_1^2+x_2^2=7$ eşitliği olsun?

$(x_1+x_2)^2-2.x_1.x_2=7$

$(2m-1)^2-2.(m-3)=7$

$4m^2-4m+1-2m+6=7$

$4m^2-6m=0$

$2m(2m-3)=0$

$\Rightarrow m=0$ ya da $m=\frac{3}{2}$

28) $x^2-2x+m=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$ olması için m kaç olmalıdır?

$\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=2 \Rightarrow \frac{2}{m}=2 \Rightarrow m=1$

29) $4x^2-5x-1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre

$\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}$ toplamı nedir?

$\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}=\frac{2-x_2+2-x_1}{(2-x_1).(2-x_2)}$

$=\frac{4-(x_1+x_2)}{4-2(x_1+x_2)+x_1.x_2}=\frac{4-\left(\frac{5}{4}\right)}{4-2\left(\frac{5}{4}\right)-\frac{1}{4}}$

$=\frac{\frac{11}{4}}{4-\frac{10}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{11}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{11}{5}$

30) $2x^2-4x+m-1=0$ denkleminin kökleri arasında

$3x_1-x_2=6$ bağıntısı olduğuna göre m nedir?

$3x_1-x_2=6$
$+\ x_1+x_2=2$

$4x_1=8 \Rightarrow x_1=2$ denklemde yerine yazılarak m değeri bulunur.

$8-8+m-1=0 \Rightarrow \boxed{m=1}$

31) $x^2-4x+m-7=0$ denkleminin kökleri arasında $x_1-x_2=2$ bağıntısı olduğuna göre m nedir?

$x_1-x_2=2$
$+\ x_1+x_2=4$

$2x_1=6 \Rightarrow x_1=3$ değeri denklemde yerine yazılırsa

$9-12+m-7=0 \Rightarrow \boxed{m=10}$

32) $x^2+ax+b=0$ denkleminin bir kökü 3,
$x^2+cx+d=0$ denkleminin bir kökü -5 tir.
Bu iki denklemin diğer kökleri eşit olduğuna göre $a-c$ nin değeri nedir?

$x^2+ax+b=0$ denkleminin kökleri 3 ve x_1

$3+x_1=-a$ (I)

$3.x_1=b$

$x^2+cx+d=0$ denkleminin kökleri -5 ve x_1

$-5+x_1=-c$ (II)

$-5.x_1=d$

(I) ve (II) kullanılırsa

$$\begin{array}{r} -1/\ 3+x_1=-a \\ -5+x_1=-c \\ + \hline -8=a-c \end{array}$$

• **Kökleri verilen denklemin yazılması:**

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklem yazılırsa

$(x-x_1).(x-x_2)=0$

$$x^2-\underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{kökler toplamı}}.x+\underbrace{x_1.x_2}_{\text{kökler çarpımı}}=0$$

$$\boxed{x^2-(K.T).x+K.Ç=0}$$

33) Kökleri $x_1=3-2\sqrt{2}$ ve $x_2=3+2\sqrt{2}$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız?

$x^2-(K.T).x+K.Ç=0$

Kökler toplamı : $3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}=6$

Kökler çarpımı : $(3-2\sqrt{2}).(3+2\sqrt{2})=1$

$x^2-6x+1=0$

34) $x^2+px+q=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Kökleri x_1+1, x_2+1 olan denklem nedir?

$x^2-(x_1+1+x_2+1)x+(x_1+1).(x_2+1)=0$

$$x^2-(\underbrace{x_1+x_2}_{-p}+2)x+\underbrace{x_1.x_2}_{q}+\underbrace{x_1+x_2}_{-p}+1=0$$

$x^2-(2-p)x+q-p+1=0$

☺ **Kısa yol...**

$x=x_1+1 \Rightarrow x_1=x-1$ değeri denklemde yerine yazılarakta bulunur.

$(x-1)^2+p.(x-1)+q=0$

$x^2-2x+1+px-p+q=0$

$x^2-(2-p).x+q-p+1=0$

35) $x^2-2x-4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden denklem nedir?

$x^2-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)x+\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}=0$

$x^2-\left(\frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}\right).x+\frac{1}{x_1.x_2}=0$

$x^2-\left(\frac{2}{-4}\right)x+\frac{1}{-4}=0$

$x^2+\frac{2x}{4}-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow 4x^2+2x-1=0$

☺ **Kısa yol...**

$x=\frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1=\frac{1}{x}$ denklemde yerine yazılır.

$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-4=0 \Rightarrow 1-2x-4x^2=0$

$4x^2+2x-1=0$

36) $x^2-3x+1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

Kökleri (x_1-2) ve (x_2-2) olan ikinci dereceden denklemi yazınız?

$x^2-(x_1-2+x_2-2).x+(x_1-2).(x_2-2)=0$

$x^2-(\underbrace{x_1+x_2}_{3}-4).x+\underbrace{x_1.x_2}_{1}-2(\underbrace{x_1+x_2}_{3})+4=0$

$x^2+x+1-6+4=0$

$x^2+x-1=0$

☺ Kısa yol...

$x=x_1-2 \Rightarrow x_1=x+2$ denklemde yerine yazılır.

$(x+2)^2-3.(x+2)+1=0$

$x^2+4x+4-3x-6+1=0$

$x^2+x-1=0$

37) $x^2-4x-1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $(2x_1-1)$ ve $(2x_2-1)$ olan ikinci dereceden denklem nedir?

$x^2-(2(x_1+x_2)-2).x+(2x_1-1).(2x_2-1)=0$

$x^2-(2(\underbrace{x_1+x_2}_{4})-2).x+4\underbrace{x_1.x_2}_{-1}-2(\underbrace{x_1+x_2}_{4})+1=0$

$x^2-6x-11=0$

☺ Kısa yol...

$x=2x_1-1 \Rightarrow x_1=\frac{x+1}{2}$ denklemde yerine yazılır.

$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-4.\left(\frac{x+1}{2}\right)-1=0$

$\Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{4}-\frac{4x+4}{2}-1=0$

$x^2+2x+1-8x-8-4=0$

$x^2-6x-11=0$

☺ $ax^2+bx+c=0$ denkleminde simetrik iki kök varsa

$x_1=-x_2$ dir.

$x_1+x_2=0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0$

Yani $b=0$ olmalıdır. (a ile c de zıt işaretli olmalı)

38) $mx^2-(m^2-25)x+m-7=0$ denkleminin simetrik iki reel kökünün olması için n nin alacağı değerler toplamı nedir?

$mx^2-(\underbrace{m^2-25}_{0})x+m+2=0$

$m^2-25=0 \Rightarrow m=\pm 5$

$m=-5$ alırsa a ile c aynı işaretli olur dolayısıyla m, -5 olamaz.

$\boxed{m=5}$ olmalıdır.